التمرين السابع عشر 17

- من أجل كل عدد مركب z ، نضع : $p(z) = z^3 - 13z^2 + 59z - 87$.

أ) . بين أن العدد 3 جذر لكثير الحدود $p(z)$.

ب)حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية ذات المجهول z : $p(z) = 0$.

1/ في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر الأعداد المركبة : $c = 5+2i$, $b = 5-2i$ ، $a = 3$

النقطتان A ، B و C صور الأعداد a ، b و c على الترتيب . و لتكن M النقطة ذات اللاحقة z تختلف عن A و B .

أ/ بين أن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين .

ب/ أوجد تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z-3}{z-5+2i}$.

جـ/ إستنتج عندئذ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z : $\frac{z-3}{z-5+2i}$ حقيقي سالب .

د/ إستنتج عندئذ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z : $\frac{z-3}{z-5+2i}$ تخيلى موجب .

2/ لتكن الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC و النقطة Ω ذات اللاحقة $2-i$.

- أكتب معادلة للدائرة (C).
- عين صورة الدائرة (C) با لدوران r ذي المركز Ω و الزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

من إعداد السيد حجاج براهيم

الحل

1) - من أجل كل عدد مركب z ، نضع : $p(z) = z^3 - 13z^2 + 59z - 87$.

أ) . بين أن العدد 3 جذر لكثير الحدود p(z) .

العدد 3 جذر لكثير الحدود p(z) يكافيء $p(3)=0$

لدينا
$$p(3) = 3^3 - 13\times 3^2 + 59\times 3 - 87$$
$$p(3) = 27 - 117 + 177 - 87$$
$$p(3) = 204 - 204 = 0$$

إذن العدد 3 جذر لكثير الحدود p(z)

ب). حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية ذات المجهول z : p(z) = 0 .

نقوم بتحليل كثير الحدود

بمأن العدد 3 جذر لكثير الحدود p(z) هذا يعنى أن $p(Z)$ يقبل القسمة على $Z-3$

هذا يعنى أن $p(z) = (Z-3)(aZ^2 + bZ + c)$

لدينا
$$p(z) = (Z-3)(aZ^2 + bZ + c)$$
$$p(z) = aZ^3 + (b-3a)Z^2 + (c-3b)z - 3c$$

بالمطابقة نجد $\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -13 \\ c - 3b = 59 \\ -3c = -87 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = 29 \end{cases}$

ومنه $p(z) = (Z-3)(Z^2 - 10Z + 29)$

حل المعادلة $p(z) = 0$

$p(z) = 0$ هذا يعني أن $(Z-3)(Z^2 - 10Z + 29) = 0$

ومنه $\begin{cases} (Z-3) = 0 \\ (Z^2 - 10Z + 29) = 0 \end{cases}$

لدين $Z - 3 = 0$ ومنه $Z = 3$

$Z^2 - 10Z + 29 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية نحسب المميز Δ

لدينا $\Delta = b^2 - 4ac$ ومنه $\Delta = 10^2 - 4\times 27$ أذن $\Delta = -16$ وبتالى $\Delta = 16i^2$ ومنه $\sqrt{\Delta} = 4i$

أذن حلول المعادلة هما $\begin{cases} Z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ Z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} Z_1 = \dfrac{10-4i}{2} \\ Z_2 = \dfrac{10+4i}{2} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} Z_1 = 5-2i \\ Z_2 = 5+2i \end{cases}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{3; 5-2i; 5+2i\}$

2). نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، النقط A , B , C صور الأعداد المركبة : $z_A = 3$, $z_B = 5 - 2i$ ، $z_C = 5 + 2i$ على الترتيب .

أ) . أثبت أن المثلث ABC قائم و متقايس الساقين.

لدينا

$$AB = |Z_A - Z_B|$$
$$AB = |3-5+2i| = |-2+2i|$$
$$AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$
$$AB = 2\sqrt{2}$$

و

$$AC = |Z_A - Z_c|$$
$$AC = |3-5-2i| = |-2-2i|$$
$$AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$
$$AC = 2\sqrt{2}$$

و

$$BC = |Z_c - Z_B|$$
$$BC = |5-2i-5-2i|$$
$$BC = |-4i|$$
$$BC = 4$$

نلاحظ أن $\begin{cases} AB = AC \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{cases}$ ومنه المثلث ABC قائم في A و متقايس الساقين

ب). فسر هندسيا عمدة العدد المركب : $\dfrac{z-3}{z-5+2i}$

لدينا

$$\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)$$
$$\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = \arg(z-z_A) - \arg(z-z_B)$$
$$\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = \left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right) - \left(\vec{i};\overrightarrow{BM}\right)$$
$$\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = \left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right) + \left(\overrightarrow{BM};\vec{i}\right)$$
$$\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = \left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)$$

جـ). عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون L عددا حقيقيا سالبا تماما .

يكون L عددا حقيقيا سالبا تماما يكافىء $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z-3}{z-5+2i}\right) = 0$

$\operatorname{Im}\left(\dfrac{z-3}{z-5+2i}\right) = 0$ يكافىء $\arg\left(\dfrac{z-3}{z-5+2i}\right) = \pi + 2k\pi$

يكافىء $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \pi + 2k\pi$

يكافىء $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right) = \pi + 2k\pi$

يكافىء يكافىء $M;B;A$ على إستقامة واحدة .

يكافىء مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة المفتوحة $]AB[$

جـ). عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون L عددا تخيلي صرف .

يكون L عددا حقيقيا سالبا تماما يكافىء $\mathrm{Re}\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right)=0$

$\mathrm{Re}\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right)=0$ يكافىء $\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

يكافىء $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

يكافىء $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

يكافىء $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MA}$ يكافىء $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}=0$

عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون L عددا تخيلي صرف هي دائرة(γ) قطرها $[AB]$ ي مركزها $I(4-i)$ منتصف القطعة$[AB]$ بإستثناء النقطة B

د). لتكن (γ) الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و Ω النقطة ذات اللاحقة $2-i$.

- عبر بالأعداد المركبة عن الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

لدينا $Z'-Z_\Omega=e^{-\frac{\pi}{2}}(Z-Z_\Omega)$ ومنه

$$Z'-2+i=-i(Z-2+i)$$
$$Z'=-iZ+2i+1+2-i$$
$$Z'=-iZ+i+3$$

- عين الصورة (γ') للدائرة (γ) بالدوران R .

صورة الدائرة (γ) بالدوران R هي دائرة (γ') نصف قطرها $r=\frac{AB}{2}$ ومركزها I' صورة I بالدوران R

ومنه $Z_{I'}=-iZ_I+i+3$ أي $Z_{I'}=-i(4-i)+i+3$

ومنه $Z_{I'}=-3i+2$

تم بحمد الله وفضله

الهم إجعله فى ميزان حسنات كل من ساهم فى هذا العمل و من نشره ونقله وأفاد به غيره أمين